OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1908. N° 6

SUR LA VALEUR PROPRE DES SÉRIES DIVERGENTES

PAR

T.-N. THIELE

Pour se faire une idée de ce que c'est au fond qu'une série infinie, autrement dit la somme d'un nombre infini de termes, le plus facile est de commencer, soit par les cas où, connaissant la forme du terme résiduel r_n en fonction du nombre ordinal n, on déduit le terme général u_n de l'équation $u_n = r_n - r_{n+1}$, soit par ceux où, connaissant u_n, on parvient à sommer la série et, réciproquement, à déterminer r_n à l'aide de cette même équation conçue comme une équation de différences finies.

Mais, qui dit infini, dit, plus ou moins, indéfini. Et la somme d'une série infinie est, de sa nature, indéfinie. Dans toute solution de notre équation de différences finies, il entre nécessairement une constante arbitraire, et si nous obtenons r_1 pour somme totale de la série, la somme totale de cette même série est encore $r_1 + k$, en désignant par k une constante arbitraire qui ne dépende pas du nombre ordinal. On sait que la somme d'un nombre infini de termes de valeur égale à zéro, est indéfinie.

Reste à savoir si, en général, nous pouvons faire disparaître ce caractère indéfini à l'aide d'une convention comprenant toutes les espèces possibles de séries.

Comme convention on ne pourra se servir ni de la valeur qu'on se proposait de trouver en formant la série, ni de la méthode appliquée, ni enfin de cette exigence que le terme résiduel soit simplifié autant que possible par la détermination de sa constante. Ces procédés entraîneraient tous des équivoques et des contradictions.

Pour le cas de séries convergentes une convention s'impose: la somme de tous les termes d'ordre fini, sans exceptions et sans additions, provenant des termes infiniment éloignés, qui sont tous égaux à zéro, voilà bien la valeur propre de la série convergente.

Parmi les séries divergentes, les séries semi-convergentes fournissent encore des valeurs approchées dont nous devons tenir compte pour arriver à nous fixer sur ce qu'il faut entendre par valeurs propres des séries. Les autres séries divergentes ne contribuent pas directement à l'établissement d'une convention; tout en étant des sommes, ce ne sont pourtant pas les sommes de leurs propres termes, astreints à figurer dans un ordre déterminé et en un nombre déterminable.

Je proposerais donc de fixer la convention nécessaire en définissant la valeur propre d'une série: la somme de la série, en tant que cette définition nous permet de maintenir sans aucune restriction les axiomes principaux de l'addition qui sont: les principes univoques de l'addition et de la soustraction et le principe associatif. Le principe commutatif de l'addition ne peut se maintenir d'une manière absolue, pas même pour les séries convergentes, et pour obtenir une convention universelle il faudrait le réduire sensiblement.

Ceci établi, nous pouvons énoncer sans aucune restriction la proposition que voici: en additionnant terme à terme des séries, la valeur propre de la série des sommes sera égale à la somme des valeurs propres des séries.

La convention sur laquelle je baserai ma définition de la valeur propre des séries sera donc le principe commutatif réduit au théorème suivant:

En supprimant ou bien en ajoutant un nombre fini de termes au commencement de la série, c'est la soustraction ou l'addition de la somme de ces termes qui changera la valeur propre de la série, et dans cette somme finie l'ordre des termes pourra être interverti.

Dans la région limite entre les termes d'ordre fini et les termes d'ordre infini, il n'y a d'autres opérations permises que celles qui se laissent dériver du principe associatif; les voici: il est permis de réunir en des sommes partielles des termes consécutifs, et réciproquement il est permis de décomposer tous les termes des séries en parties consécutives; enfin, les termes de l'une des séries peuvent se déplacer, dans les limites d'un nombre constant et fini de termes, par rapport à la série à laquelle ils doivent être ajoutés un à un. La multiplication de la valeur propre d'une série se fait en multipliant tous les termes de la série par un même facteur.

Il y a lieu de croire qu'en définissant les valeurs propres comme nous venons de les définir, on pourra faire des applications utiles des séries divergentes; — il est vrai qu'elles seront toujours moins faciles à employer que les séries convergentes. Mais avant de montrer ce qui en est, je dois entreprendre une classification beaucoup plus détaillée que celle qui distingue tout simplement entre séries convergentes et séries divergentes.

Celle que je vais proposer tient compte de la manière dont se comporte la série dans le voisinage de la limite qui sépare les nombres ordinaux finis des nombres ordinaux infinis. Les deux premières et plus importantes caractéristiques de cette classification se déduisent des deux plus importants indices de convergence ou de divergence.

Les séries proportionnelles dans tous leurs termes, sont regardées ici comme identiques. Comme c'est le cas pour l'indice de convergence de Cauchy, la première caractéristique dépendra du quotient de deux termes consécutifs. Désignons par

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

la cote du n[ième] terme, et par

$$q_\infty = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

la cote limite. Selon que le module de la cote limite est supérieur ou inférieur à 1, la série sera, respectivement, convergente ou divergente. S'il s'agit d'une série „géométrique", la cote sera constante dans toute la série. Toutes les divisions principales de séries ayant pour cote limite un seul et même nombre, auront donc pour série modèle une série géométrique.

Grâce à une généralisation de l'indice de convergence établi par Duhamel, j'écris:

$$q'_n = n\left(1 - \frac{q_\infty}{q_n}\right) = n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right),$$

et en appelant ce q'_n le „caractère" de la série relativement au nombre ordinal n, je caractérise ensuite les séries comprises dans chacune de ces subdivisions à cote limite commune par leur caractère q'_n; la série en question pourra donc s'écrire:

$$u_1\left(1 + \frac{1 - q'_1}{q_\infty}\left(1 + \frac{2 - q'_2}{2\, q_\infty}\left(1 + \ldots \frac{n - q'_n}{n q_\infty}\left(1 + \ldots\right)\ldots\right)\right)\right).$$

J'emploie la valeur du „caractère limite":

$$q'_\infty = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} n\left(1 - \frac{q_\infty}{q_n}\right)$$

comme base d'une classification secondaire des séries.

Dans les cas où le critère de Cauchy ne se laisse pas employer, c'est-à-dire dans le cas où la cote limite est une racine de l'unité, la frontière entre les séries convergentes et les séries divergentes passera par le caractère limite $q'_\infty = 0$; pour une cote limite $= 1$ elle sera située au caractère limite $= 1$ (Duhamel).

Selon le signe de la partie réelle de leur caractére limite les séries divergentes seront ou semi-convergentes, au sens le plus large du mot (caractère positif), ou bien divergentes de manière à ne permettre aucune approximation à leur valeur propre (caractère négatif).

Le caractère limite ne sera infiniment grand que dans les cas où la cote limite aura été déterminée d'une manière inexacte. Une forte augmentation du caractère-limite positif dénote la possibilité d'une augmentation de la cote limite et, éventuellement, le passage de divergence à convergence.

Les séries à caractère constant, $q'_n = q'_\infty$, sont les séries binômes pour

$$\left(1 - \frac{1}{q_\infty}\right)^{q'_n - 1},$$

et en dehors de ces séries il n'en existe pas qui aient q_∞ pour cote limite et q'_∞ pour caractère constant. Dans toute subdivision à cote limite q_∞ et à caractère limite q'_∞ la série modèle est ordinairement binôme. Un seul cas fait exception: lorsque q_∞ est un nombre entier positif, le binôme sera une série finie (Voir ci-dessous).

La classification peut se continuer à l'aide des caractèristiques $q_n^{(r)}$, qu'on déduira successivement suivant l'algorithme

$$q_n^{(r+1)} = n\left(1 - \frac{q_\infty^{(r)}}{q_n^{(r)}}\right).$$

Ces caractérlstiques n'ont pas d'importance en tant que critères subtils de convergence, mais on peut s'en servir pour l'amélioration des séries. (Voir plus loin).

La dépendance entre la cote et les caractéristiques plus élevées est représentée par la fraction continue:

$$q'''_n = n - \frac{nq''_\infty|}{|n} - \frac{nq'_\infty|}{|n} - \frac{nq_\infty|}{|q_n}$$

et

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{nq_\infty|}{|n} - \frac{nq'_\infty|}{|n} - \frac{nq''_\infty|}{|n} - q'''_n.$$

Pour q''_n constant, $q''_n = q''_\infty$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n - q'_\infty - q''_\infty}{(n - q''_\infty)\, q_\infty};$$

par conséquent, on aura, pour $q''_\infty =$ un nombre entier réel, une série binôme „déplacée“ où les q''_∞ premiers termes font défaut (on y a ajouté $- q''_\infty$ termes nouveaux).

Dans le cas exceptionnel où q'_∞ est un entier positif de sorte que nous obtenons une série binôme finie, la série „déplacée“, où manquent les termes de la série finie, remplace la série modèle supprimée par la série:

$$qq' \left\{ \sum_{r=1}^{r=q'-1} \frac{1}{r} (1-q)^{-r} - \log\left(1 - \frac{1}{q}\right) \right\} (1-q)^{q'-1},$$

pour laquelle $q_\infty = q$, $q'_\infty = q'$ et $q''_n = - q'$.

Au cas où q'''_n est la première caractéristique constante, $q''_n = q'''_\infty$, une telle série se détermine à l'aide de la proportion

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 - (q'_\infty + q''_\infty + q'''_\infty)\, n + q'_\infty q'''_\infty}{n\,(n - q''_\infty - q'''_\infty)\, q_\infty}$$

comme étant une série hypergéométrique.

Pour toute série, divergente ou convergente, ayant pour cote limite et autres caractéristiques des valeurs déterminées, nous sommes donc à même de former des séries bien connues „osculant“ à l'infini la série avec 2 ou 3 caractéristiques, si nous nous en tenons aux séries binômes, et avec 4 ou 5 caractéristiques communes, si nous pouvons faire usage de séries hypergéométriques.

Les séries n'ayant pas de valeur déterminée pour leur cote limite ou pour quelque autre caractéristique importante, ne sont pas comprises dans cette classification. Cependant on pourra quelquefois les y faire entrer, et notamment en les considérant comme sommes de séries plus simples.

La question qui se pose maintenant est de savoir si la définition de la valeur propre des séries qu'établissait la convention proposée, pourra se développer à l'aide de cette classification.

Nous avons dit qu'en première ligne il faut que les séries convergentes aient des cotes limites à modules supérieurs à ceux des séries divergentes et que, dans les cas de transition, c'est la partie réelle du caractère limite des séries convergentes qui l'emporte sur celle des séries divergentes. La justesse de cette division à deux étages se trouve confirmée par une série de théorèmes relatifs à l'addition et à la soustraction des séries. En voici les plus importants:

A. La somme (ou la différence) de séries à modules de cotes limites inégaux aura la même cote limite que le terme qui a le moindre module de cote limite.

B. La différence (ou la somme) de séries à cotes limites identiques a généralement la même cote limite que les deux séries en question; cependant, comme nous le montre le théorème A, la différence peut avoir, par exception, une cote limite plus grande, jamais plus petite, que celle des séries.

C. En additionnant ensemble deux séries à cotes limites identiques mais à caractères limites différents, le caractère limite de la somme sera identique au caractère limite de celui des deux termes qui aura eu la partie réelle la moins positive, ou la plus négative.

D. En retranchant une série d'une autre série ayant la même cote limite et le même caractère limite que la première, la différence des deux séries aura encore, en règle générale, cette même cote limite et ce même caractère limite. Toutefois ou pourra généralement, en multipliant d'abord la série à soustraire par un facteur convenable, obtenir une augmentation du caractère limite de la différence. Il est vrai qu'il y a des cas où cette augmentation est extrêmement petite, mais en revanche il y en a d'autres où nous obtenons ainsi non seulement une augmentation indéfiniment grande du caractère limite mais encore une amélioration de la cote limite.

Nous pouvons même obtenir comme différence une série finie.

Sur ces théorèmes se fonde la *méthode par soustraction* qui peut servir à remédier aux divergences et aux convergences trop tardives. L'application théorique de cette méthode suppose connus la cote limite de la série considérée et, si possible, son caractère limite, et encore, autant que possible, ses autres caractéristiques. Cette méthode suppose également connues les valeurs propres des séries modèles à caractéristique identique; elle exige en outre qu'une seule ou plusieurs de ces séries soient retranchées de la série considérée après avoir été multipliées par des facteurs convenables.

Le résultat dépendra nécessairement du nombre des caractéristiques dont on aura pu reconnaître l'identité, et ce nombre dépendra à son tour des connaissances acquises, par les progrès de la science, relativement aux valeurs propres des séries divergentes spéciales.

On remarquera que dans le cas représenté en B on ne pouvait pas s'attendre à obtenir une augmentation de la cote limite, ni, ensuite, une réduction en série convergente après un nombre fini de soustractions de séries connues, tandis que dans le cas D nous pouvons espérer d'obtenir une amélioration du caractère limite et une bonne semi-convergence. En voici l'explication.

En désignant par q la cote limite commune de deux séries, et par q' leur caractère limite commun, on aura, pour $Q_n =$ la cote de la série différence et pour $Q'_n =$ le caractère de cette série:

$$Q_n = \frac{q}{1 - \dfrac{q'}{n - Q''_n}} \quad \text{et} \quad Q'_n = \frac{q'}{1 - \dfrac{1}{n} Q''_n}$$

où Q''_n représentera une fonction du facteur disponible de la série à soustraire et aura la forme d'une fraction dont le numérateur aussi bien que le dénominateur seraient de premier degré. On pourra choisir ce facteur de manière que la valeur limite de Q''_n devienne infinie en même temps que n. On aura ainsi, en règle générale, pour $n - Q''$ de l'équation relative à Q_n une valeur limite infinie; ce n'est que dans des cas spéciaux qu'elle deviendra finie et pourra par conséquent influencer Q_n. Par contre on pourra ordinairement déterminer le facteur de façon que $\frac{Q''_n}{n}$ de l'équation relative à Q'_n soit fini; ce quotient ne devenant égal à zéro que dans des cas spéciaux qui ne seront probablement pas difficiles à éviter.

E. En retranchant du terme u_{n+1} d'une série quelconque le terme immédiatement précédent de la même série divisé par la cote limite de la série, $\frac{u_n}{q_\infty}$, on obtient une série „multipliée" $\left(\text{par } 1 - \frac{1}{q_\infty}\right)$ qui aura généralement la cote limite de la série primitive. Si, en effet, la cote limite n'a pas changé, le caractère limite aura augmenté de $+1$ par suite de la multiplication, du moins c'est là le cas pour les séries où l'une des caractéristiques d'ordre élevé est constante, à savoir: les séries binômes, les séries hypergéométriqués et les séries pour lesquelles la fraction continue est finie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{nq}{n}\Big/ - \frac{nq'}{n}\Big/ - \frac{nq''}{n}\Big/ - \; \ldots\ldots$$

Car on obtient par la méthode par multiplication:

$$Q_n = \frac{(n - q''_n)\, q}{n - 1 - q' - q''_{n-1}} \quad \text{et} \quad Q'_n = (1 + q' + q''_{n-1} - q''_n)\, \frac{n}{n - q''_n}.$$

Le théorème E constitue en soi une autre méthode pour l'amélioration des séries: *la méthode par multiplication.* Comme elle n'exige pour la détermination de $\left(1 - \frac{1}{q_\infty}\right)$, facteur dans la multiplication formelle de la série, que la connnaissance de la cote limite de la série, et comme en outre la valeur propre de la série est réellement multipliée par le même facteur, cette méthode a sur la méthode par soustraction le grand avantage de ne pas supposer connues les valeurs propres d'autres séries similaires. Il est vrai que le plus souvent on n'obtient qu'une faible amélioration de la convergence par une application simple de la méthode par multiplication, mais on pourra toujours la répéter un nombre indéfini de fois. Cette méthode nous fournit donc la possibilité, au moins théorique, de la transformation des séries divergentes considérées en séries semi-convergentes.

Dans la pratique ces méthodes sont toutes les deux d'une très grande importance pour l'amélioration des séries tardivement convergentes. Le calcul pratique des séries divergentes offrira presque toujours des difficultés considérables; remarquons toutefois qu'il n'est pas difficile d'élargir par des modifications et des généralisations les deux méthodes en question.

La multiplication par d'autres facteurs, et notamment par $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}$, pourra se montrer pratiquement utile, tant pour les séries tardivement convergentes, en prenant n aussi grand que le permettent les termes connus de la série, — c'est là une pratique de date ancienne —, que pour la multiplication formelle par $1+1$ des séries semi-convergentes au sens le plus étroit du mot, c'est-à-dire pour la formation de moyennes. Il est clair que dans ce dernier cas la cote sera de -1 là où il faudra couper la série.

Pour l'utilisation de la méthode par soustraction il importe de connaître les valeurs propres des séries divergentes à soustraire, c'est-à-dire celles des séries binômes, hypergéométriques, etc.

En ce qui concerne les séries binômes M. J.-P. Gram m'a montré le chemin par une communication faite à l'une des séances de l'Académie[1]. Non seulement ces séries sont sou-

[1] Séance du 20 mars 1908.

vent semi-convergentes au sens étroit du mot, mais dans la majorité des cas on pourra, avec la méthode par multiplication, les réduire directement en séries semi-convergentes au sens le plus large et les améliorer indéfiniment. Au moyen de la méthode d'interpolation j'ai réussi à démontrer qu'à condition d'être interrompue au terme minimum cette semi-convergence nous offre une approximation vers

$$\text{la valeur propre} = \left(1 - \frac{1}{q_\infty}\right)^{q'_\infty - 1}.$$

Continuée indéfiniment à l'aide de la méthode par multiplication, l'approximation se montre convergente vers cette valeur, sauf dans les cas où le nombre fondamental $1 - \frac{1}{q_\infty}$ est réel mais négatif. Quand cela arrive, il faut suppléer à la convention portant sur la valeur propre par des conclusions par analogie tirées des cas complexes avoisinants ou bien par interpolation entre les arguments non douteux où q'_∞ est entier et réel et auxquels il faut ajouter ceux où q'_∞ a la forme: $\frac{1}{2}$ + un nombre entier, en prenant la valeur propre = zéro. C'est-à-dire que

$$\text{la valeur propre} = \left(\frac{1}{q_\infty} - 1\right)^{q'_\infty - 1} \cos(q'_\infty - 1)\pi.$$

Si nous arrivons ainsi à constater que dans la grande généralité des cas, les séries divergentes, tout aussi bien que les séries convergentes, ont des valeurs propres déterminées et qui se laissent indiquer, on pourrait se demander s'il y a des raisons pour maintenir la limite marquée entre la convergence et la divergence. Rappelons à ce sujet qu'il y a des cas spéciaux où la valeur propre d'une série infinie est indéfinie ou infinie, comme c'est aussi le cas pour la valeur d'une formule finie. C'est ce qui a lieu à la limite qui sépare les séries convergentes des séries divergentes et dans le cas ci-dessus mentionné où la cote limite est positive et < 1. Il est clair que lorsque nous ne pouvons pas le faire disparaître, ce caractère indéterminé dénote généralement une interruption de la continuité.

Un problème plus important que celui de la limite entre convergence et divergence, est celui qui s'occupe des cas d'indétermination résultant dans la cote limite ou dans quelque autre caractéristique des variations du paramètre. Il appartient à la théorie des fonctions de le résoudre.

Qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir recours à cette théorie moderne pour traiter le problème de la divergence, et même d'une manière assez simple, c'est ce que je m'étais proposé de montrer ici.